数理解析研究所講究録
663巻 1988年 23-39

REDUCEでReduceを

SEIKO EPSON 株式会社 鈴木哲也（Tetsuya Suzuki）
山梨大学工学研究科 小野寺修（Osamu Onodera）

序章

1880年にAppellは超幾何関数の一般化として２変数の４つの関数を導入した．これらは２変数の超幾何関数と呼ばれ，いずれもそれぞれ別個の連立偏微分方程式を満たす．この連立偏微分方程式は２変数の超幾何微分方程式系と呼ばれ，本質的には，完全積分可能な連立全微分方程式である．

最近，多複素変数の解析関数の理論の基礎が完成された．このような理論は，複素領域上の偏微分方程式と同様に全微分方程式の一般論の確立にも利用されている．

本研究では，２変数の超幾何関数等とそれらが満たす連立偏微分方程式から完全積分可能な連立全微分方程式を導く．さらに，この連立全微分方程式を１変数ｙを定数とした断面（y-section）における超幾何常微分方程式に変換するアルゴリズムを見いだし，数式処理言語REDUCEを用いてこの微分方程式系の変換システムを開発することに成功した．

さらに，これら超幾何常微分方程式を含むFuchs型線型常微分方程式をHypergeometric Systemと呼ばれる１階の連立常微分方程式に変換するシステムを，やはりREDUCEを用いて開発した．

Fuchs型線型微分方程式とは，複素平面上で無限遠点も含めて特異点が確定特異点のみからなる微分方程式であり，超幾何常微分方程式はまさにFuchs型である．

Hypergeometric System とは，次章で(1.1.6)式の形をした微分方程式系である．この方程式系に直すことで，無限遠点確定特異点における特性指数が，行列Ａの固有値によって与えられる．また，有限確定特異点における特性指数は，行列Ａの対角要素によって与えられる．従って，この方程式系に直すことで大域解の特性が明確になる．

第1章 Fuchs型常微分方程式からHypergeometric sysytem への変換理論

§1－1 はじめに

$t=\lambda_j (j=1,\cdots,m)$, $t=\infty$を確定特異点とし、他の点では正則なr階のFuchs型常微分方程式は次のように表わすことができる：

$$\phi(t)^r y^{(r)} = \sum_{j=1}^{r} \phi(t)^{r-j} A_j(t) y^{(r-j)} \quad (t\in\mathbb{C}) \qquad (1.1.1)$$

ここで、

$$\phi(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_m)$$

$A_k(t)$: 高々$(m-1)k$次の多項式

(1.1.1)の両辺を$r(m-1)$回微分して、Leibnizの法則を用いて整理すると、次の形式の微分方程式が得られる：

$$P_n(t)y^{(n)} = P_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)y'+P_0(t)y \quad (t\in\mathbb{C}) \qquad (1.1.2)$$

ここで、

$$n = rm$$

$$P_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-\lambda_k)$$

$P_i(t)$:高々i次の多項式

Fuchs型常微分方程式の一般形とも考えられる単独の微分方程式(1.1.2)は、Hypergeometric systemと呼ばれる次の1階の常微分方程式系に変換できる：

$$\begin{cases} (t-\lambda_j)\dfrac{dy_j}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} a_{j,k}\, y_k + y_{j+1} & (j=1,\cdots,n-1) \\ (t-\lambda n)\dfrac{dy_n}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\, y_k & \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

、

ここで、従属変数$y_1,\cdots,y_n$は、次のように定義する：

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_{k+1} = (t-\lambda_k)\dfrac{dy_k}{dt} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\, y_j & (k=1,\cdots n) \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

また(1.1.3)の係数$\{a_{j,k}: 1\leqq j\leqq n, 1\leqq k\leqq j\}$は、次の式を満足するものとする：

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= P_n(t)y^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)y^{(k)} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (1.1.5)$$

(1.1.3)を行列を用いてあらわすと：

$$(tI-B)\frac{dX}{dt} = AX \tag{1.1.6}$$

ここで、

I：n次の単位行列

$B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

$X = (y_1, \cdots, y_n)^t$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 1 & & \text{\textcircled{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

(1.1.2)から(1.1.6)への変換の研究では、K.Okubo[16]が証明なしで(1.1.2)と(1.1.6)が同値であることを示している。

M.Hukuhara[10]は$\lambda_j \neq \lambda_k$($j \neq k$)の場合の同値性の短かい証明を(1.1.2)と(1.1.6)の解の間の関係を考慮して与えた。

その後K.Okubo[18]は、代数的方法で完全で詳細な証明を与えたが、(1.1.6)における行列Aの最終的な結果を与えていなかった、しかし、K.Okubo[17]では代数的方法で行列Aの最終的結果を示した。その間、M.Kohno and T.Suzuki[13]によって行列Aを決定していく新しい方法が開発された。これは、以上のものより明確で構成的であり、計算機による数式処理に最も適したアルゴリズムを与えている。

§1－2 Kohno type による変換

ここで、(1.1.2) の特異点に対して重複を許す。このとき、$t = \lambda_j$($1 \leqq j \leqq r$)が(1.1.2)の確定特異点であるためには(1.1.2)の微係数$P_j(t)$($j=0, \cdots, n$)に対して、次の条件を満たさなければならない：

$(t-\lambda_k)^i P_{n-i}(t)/P_n(t)$ $(i=1, \cdots, n) \to t=\lambda_k$で正則。

つまり、$P_{n-i}(t)$は因子$(t-\lambda_k)^{n_k-i}$ $(1 \leqq i \leqq n_k)$を含んでいなければならない。従って、微係数$\{P_{n-i}(t)\}$は以下のように書き表わせる：

$$P_{n-i}(t)=\begin{cases}[\prod_{k=1}^{r}(t-\lambda_k)^{n_k-i}]\,\hat{P}_{n-i}(t) & (0 < i \leqq n_r)\\ [\prod_{k=1}^{j-1}(t-\lambda_k)^{n_k-i}]\,\hat{P}_{n-i}(t) & (n_j < i \leqq n_{j-1}: j = r,\cdots,2)\\ \hat{P}_{n-i}(t) & (n_1 < i \leqq n),\end{cases} \qquad (1.2.1)$$

ここで、$\hat{P}_{n-i}(t)$は、$n_j < i \leqq n_{j-1}$($j = 1,\cdots,r+1$:$n_0 = n$, $n_{r+1} = 0$)に対して高々次の(1.2.2)で示す次数の多項式である：

$$\begin{aligned}&(n-i) - \{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}-i(j-1)\}\\ &= n - N_{j-1} + i(j-2)\end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

ここで次の記号を定義する：

$$\phi_j = \prod_{k=1}^{j}(t-\lambda_k) \qquad (j = 1,\cdots,n)$$

この記号を使って、(1.1.4)を以下のように書き替える：

$$\begin{cases}y_1 = y\\ y_2 = \phi_1 y' + b_{2,0}(t)y\\ \quad\vdots\\ y_j = \phi_{j-1}y^{(j-1)} + b_{j,j-2}(t)y^{(j-2)} + \cdots + b_{j,0}(t)y\\ \quad\vdots\\ y_n = \phi_{n-1}y^{(n-1)} + b_{n,n-2}(t)y^{(n-2)} + \cdots + b_{n,0}(t)y\\ y_{n+1} = \phi_n y^{(n)} + b_{n+1,n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + b_{n+1,0}(t)y,\end{cases} \qquad (1.2.3)$$

ここで、$b_{j,k}(t)$は高々k次の多項式である、ただし$k<0$の場合は零である。

ここで、以降の説明に必要な幾つかの記号を定義する。

$$\phi_k = \prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j) \qquad (1 \leqq k \leqq r)$$

$$g_k{}^i = \sum_{j=1}^{k}(n_j-i)\prod_{\substack{j1=1\\ j1\neq j}}^{k}(t-\lambda_{j1}) \qquad (1 \leqq k \leqq r)$$

$$f_k{}^i = \prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j)^{n_j-i}, \qquad (1 \leqq k \leqq r)$$

これらの記号を使うと(1.2.1)は、次の形に書き直される：

$$\begin{cases} P_{n-i}(t) = f_{j-1}{}^{i}\,\hat{P}_{n-i}(t) & (n_j < i \leqq n_{j-1} : j = r+1,\cdots,2) \\ P_{n-i}(t) = \hat{P}_{n-i}(t) & (n_1 < i \leqq n) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

(1.2.3)における係数$\{b_{j,k}(t)\}$は次に示すように因子を持っているとする：

$$b_{j,j-i}(t) = f_k{}^{i-1}(t-\lambda_k)^{j-N_k}\,\hat{b}_{j,j-i}(t) \tag{1.2.5}$$

$$(N_{k-1} < j \leqq N_k : k = 1,\cdots,r)$$

ただし、

$$(t-\lambda_k)^{n_k-N_k+j-i+1} \equiv 1 \qquad (n_k-N_k+j+1 \leqq i)$$

$$(t-\lambda_m)^{n_m-i+1} \equiv 1 \qquad (n_m+1 \leqq i)$$

(1.2.3)の要素y_jにおいて、両辺をtで微分した後、因子$(t-\lambda_j)$を掛ける：

$$\begin{aligned}(t-\lambda_j)y_j' = \phi_j y^{(j)} + (t-\lambda_j)\{(\phi_{j-1}'+b_{j,j-2}(t))y^{(j-1)} \\ +(b_{j,j-2}'(t)+b_{j,j-3}(t))y^{(j-2)} \\ +\cdots \\ +(b_{j,1}'(t)+b_{j,0}(t))y'\}\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

(1.2.3)より、次式を(1.2.6)の右辺へ代入する：

$$\phi_j y^{(j)} = y_{j+1} - b_{j+1,j-1}(t)y^{(j-1)} - \cdots - b_{j+1,0}(t)y\ ,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (t-\lambda_j)y_j' = y_{j+1} \\ + \{(t-\lambda_j)(\phi_{j-1}'+b_{j,j-2}(t))-b_{j+1,j-1}(t)\}y^{(j-1)} \\ + \cdots \\ + \{(t-\lambda_j)(b_{j,1}'(t)+b_{j,0}(t))-b_{j+1,1}(t)\}y' \\ - b_{j+1,0}(t)y\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

ここで一方、(1.1.6)のj行目の要素を考える：

$$\begin{aligned}(t-\lambda_j)y_j' &= a_{j,1}y_1 + a_{j,2}y_2 + \cdots + a_{j,j}y_j + y_{j+1} \\ &= y_{j+1} + a_{j,j}\phi_j y^{(j-1)} + \cdots\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

(1.2.7)と(1.2.8)とにおいて、$y^{(j-1)}$の係数を比較すると：

$$(t-\lambda_j)\{\phi_{j-1}'+b_{j,j-2}(t)\}-b_{j+1,j-1}(t) = a_{j,j}\phi_{j-1} \tag{1.2.9}$$

第１番目に、(1.2.9)を用いて多項式$\{b_{j,j-2}(t)\}$と定数$\{a_{j,j}\}$を決定していくが、このとき j の範囲を大きく二つに分けて考える。

〔１－１〕$N_{k-1} < j,\ j+1 \leqq N_k$の場合
このとき、(1.2.9)式は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
b_{j,j-2}(t) &= f_k{}^1(t-\lambda_k)^{j-N_k}\bar{b}_{j,j-2}(t) \\
&= f_k{}^1(t-\lambda_k)^{j-N_k}[(t-\lambda_k)^{-1}\phi_{k-1}\{a_{j,j}-(j-N_{k-1}-1)\} \\
&\qquad + \bar{b}_{j+1,j-1}(t) - g_{k-1}{}^0] \qquad (1.2.10)
\end{aligned}
$$

(1.2.10)の両辺を$f_k{}^1(t-\lambda_k)^{j-N_k-1}$で割り、整理すると：

$$
\begin{aligned}
&\phi_{k-1}\{a_{j,j} - (j-N_{k-1}-1)\} \\
&= (t-\lambda_k)\{\bar{b}_{j,j-2}(t) - \bar{b}_{j+1,j-1}(t) + g_{k-1}{}^0\} \qquad (1.2.10)'
\end{aligned}
$$

(1.2.10)'式に $t=\lambda_k$を代入することで定数$\{a_{j,j}\}$を、そしてその結果から多項式$\{b_{j,j-2}(t)\}$を確定できる：

$$
a_{j,j} = j - N_{k-1} - 1 \qquad (N_{k-1} < j < N_k) \qquad (1.2.11)
$$

$$
b_{j,j-2}(t) = f_k{}^1(t-\lambda_k)^{j-N_k}(\bar{b}_{j+1,j-1}(t)-g_{k-1}{}^0) \qquad (1.2.12)
$$

〔１－２〕$j = N_k,\ N_k < j+1 \leqq N_{k+1}$の場合
〔１－１〕と同様の方法で次式を得る：

$$
a_{j,j} = n_{k-1} - 1 - \frac{\bar{b}_{j+1,j-1}(\lambda_k)}{\phi_{k-1}(\lambda_k)} \qquad (1.2.14)
$$

$$
\begin{aligned}
b_{j,j-2}(t) &= f_{k-1}{}^1(t-\lambda_k)^{-1}\{\phi_{k-2}(a_{j,j}-n_k+1)+\bar{b}_{j+1,j-1}(t)\} \\
&\quad - f_{k-1}{}^1 g_{k-2}{}^0 \\
&= f_{k-1}{}^1\bar{b}_{j,j-2}(t) \qquad (1.2.15)
\end{aligned}
$$

ただし、(1.2.15)において定数$\{a_{j,j}\}$は、(1.2.14)によってすでに確定している。

以上、〔１－１〕と〔１－２〕からわかるように、$\{\bar{b}_{j+1,j-1}(t)\}$の形が決まっていれば、定数$\{a_{j,j}\}$及び多項式$\{b_{j,j-2}(t)\}$は決定できる。

最後に、〔1－2〕の特別な場合として、j＝nの場合を考える。
(1.2.14)，(1.2.15)より：

$$a_{n,n} = n_r - 1 - \frac{\hat{b}_{n+1,n-1}(\lambda_r)}{\phi_{r-1}(\lambda_r)},$$

$$b_{n,n-2}(t) = f_r{}^1(t-\lambda_r)^{-1}\{\phi_{r-2}(a_{n,n}-n_r+1)+\hat{b}_{n+1,n-1}(t)\} - f_r{}^1 g_{r-1}{}^0$$

ここで、$\hat{b}_{n+1,n-1}(t)$は次のようにして与える。(1.1.4)と(1.2.3)において、j＝n+1の場合を比較すると：

$$b_{n+1,n-i}(t) = -P_{n-i}(t) \tag{1.2.16}$$

また(1.2.4)の関係を用いると：

$$\hat{b}_{n+1,n-i}(t) = -\hat{P}_{n-i}(t) \tag{1.2.17}$$

従って、行列Aの対角成分及び多項式$\{b_{j,k}(t)\}$の決定の手順は、(1.2.17)の関係を使うことで、先ず初めに$P_{n-1}(t)$より$\hat{b}_{n+1,n-1}(t)$が決定される。次いで、定数$\{a_{n,n}\}$が確定でき、その情報を使うことで多項式$\{b_{n,n-2}(t)\}$が決定される。その多項式$\{b_{n,n-2}(t)\}$を使うことで、定数$\{a_{n-1,n-1}\}$が、そして多項式$\{b_{n-1,n-3}(t)\}$が断定される。この計算が続けられ、最後に$a_{1,1}=0$が決まってくる。ここでの決定の仕方は、一意的である。

次に、(1.2.9)の関係を(1.2.7)に代入し、yの微係数で整理すると：

$$\begin{aligned}(t-\lambda_j)y_j' = {} & y_{j+1} + a_{j,j}y_j \\ & + [(t-\lambda_j)\{b_{j,j-2}'(t)+b_{j,j-3}(t)\}-b_{j+1,j-2}(t) \\ & \qquad -a_{j,j}b_{j,j-2}(t)]y^{(j-2)} \\ & + \cdots \\ & + [(t-\lambda_j)\{b_{j,1}'(t)+b_{j,0}(t)\}-b_{j+1,1}(t)-a_{j,j}b_{j,1}(t)]y' \\ & - [b_{j+1,0}(t)+a_{j,j}b_{j,0}(t)]y \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

先程と同様に(1.2.18)と(1.2.8)において、$y^{(j-2)}$の係数を比較する：

$$(t-\lambda_j)\{b_{j,j-2}'(t)+b_{j,j-3}(t)\} - b_{j+1,j-2}(t) - a_{j,j}b_{j,j-2}(t)$$
$$= a_{j,j-1}\phi_{j-2} \qquad (1.2.19)$$

ここでも(1.2.19)を使って第1副対角成分である定数$\{a_{j,j-1}\}$と多項式$\{b_{j,j-3}(t)\}$を決定していくが、今度はjの範囲を大きく三つの場合に分けて考える。

〔2－1〕$j = N_k,\ N_k < j+1 \leqq N_{k+1}$の場合

この場合、(1.2.19)式は次の形となる：

$$\begin{aligned} b_{j,j-3}(t) &= f_k^2\,\mathfrak{b}_{j,j-3}(t) \\ &= f_k^2\{(a_{j,j}\phi_{k-1}-g_k^1)\,\mathfrak{b}_{j,j-2}(t)-\phi_k\,\mathfrak{b}_{j,j-2}'(t)\} \\ &\quad + (t-\lambda_k)^{-1}f_k^2(a_{j,j-1}\phi_{k-1}^2+\mathfrak{b}_{j+1,j-2}(t)) \end{aligned}$$

これより、第1番目と同様に両辺を$f_k^2(t-\lambda_k)^{-1}$で割り、$t=\lambda_k$を代入すると、定数$\{a_{j,j-1}\}$及び多項式$\{b_{j,j-3}(t)\}$は次のように決定される：

$$a_{j,j-1} = -\frac{\mathfrak{b}_{j+1,j-2}(\lambda_k)}{\phi_{k-1}(\lambda_k)^2},$$

$$\begin{aligned} b_{j,j-3}(t) &= f_k^2[(a_{j,j}\phi_{k-1}-g_k^1)\,\mathfrak{b}_{j,j-2}(t)-\phi_k\,\mathfrak{b}_{j,j-2}'(t) \\ &\quad +(t-\lambda_k)^{-1}f(a_{j,j-1}\phi_{k-1}^2+\mathfrak{b}_{j+1,j-2}(t))] \end{aligned}$$

〔2－2〕$N_{k-1}+2 \leqq j \leqq N_k-1$の場合

〔2－1〕と同様に：

$$a_{j,j-1} = 0$$
$$\begin{aligned} b_{j,j-3}(t) &= f_k^2(t-\lambda_k)^{j-N_k}[\{(a_{j,j}-j+N_k)\phi_{k-1}-g_k^1\}\,\mathfrak{b}_{j,j-2}(t) \\ &\quad -\phi_k\,\mathfrak{b}_{j,j-2}'(t)+\mathfrak{b}_{j+1,j-2}(t)] \end{aligned}$$

〔2－3〕$j = N_{k-1}+1$の場合

$$a_{j,j-1} = -\frac{\mathfrak{b}_{j+1,j-2}(\lambda_k)}{\phi_{k-1}(\lambda_k)\phi_{k-2}(\lambda_k)} - \frac{a_{j,j}\,\mathfrak{b}_{j,j-2}(\lambda_k)}{\phi_{k-2}(\lambda_k)},$$

$$\begin{aligned} b_{j,j-3}(t) &= f_{k-1}^2[(t-\lambda_k)^{-1}\{(a_{j,j}\phi_{k-1} - g_k^1)\,\mathfrak{b}_{j,j-2}(t) \\ &\quad - \phi_k\,\mathfrak{b}_{j,j-2}'(t)\} \\ &\quad + \{a_{j,j-1}\phi_{k-1}\phi_{k-2} + \mathfrak{b}_{j+1,j-2}(t)\}] \end{aligned}$$

以上のように、今度は$\{\hat{b}_{j+1,j-2}(t)\}$の形が分かっていれば、定数$\{a_{j,j-1}\}$及び多項式$\{b_{j,j-3}(t)\}$は全て決定できる。このことは、(1.2.17)の関係より解決される。ここでもやはり$P_{n-2}(t)$からの決定の仕方は、一意的である。

以上の手続きを続けると、定数$\{a_{j,k}\}$と多項式$\{b_{p,q}(t)\}$に対し、一般に次のような関係式を得る：

$$\begin{aligned}&(t-\lambda_j)\{b_{j,j-k-1}(t)+b_{j,j-k}'(t)\}\\&=b_{j+1,j-k}(t)+\sum_{i=0}^{k-2}a_{j,j-i}b_{j-i,j-k}(t)+a_{j,j-k+1}\phi_{j-k}\\&\qquad(k=2,\cdots,j-1)\end{aligned}\tag{1.2.20}$$

第3番目は(1.2.20)から第(i-1)副対角成分である定数$\{a_{j,j-i+1}\}$と多項式$\{b_{j,j-i-1}(t)\}$($i=3,\cdots,j-1$)を決定していくが、今度はjの範囲を大きく三つに、iの範囲を二つに分ける。

〔3－1〕$3\leq i\leq n_k$かつ$j=N_k$の場合

(1.2.20)は、下記のごとく書き替えられる：

$$\begin{aligned}b_{j,j-i-1}(t)=f_k{}^i[&(t-\lambda_k)^{-1}(\phi_{k-1}{}^i a_{j,j-i+1}+\hat{b}_{j+1,j-i}(t))\\&+\sum_{m=0}^{i-2}a_{j,j-m}f_{k-1}{}^i\phi_{k-1}{}^{m+1}\hat{b}_{j-m,j-i}(t)\\&-\{g_{k-1}{}^{i-1}(t-\lambda_k)+\phi_{k-1}(n_k-i+1)\}\hat{b}_{j,j-i}(t)\\&+(t-\lambda_k)\phi_{k-1}\hat{b}_{j,j-i}'(t)]\end{aligned}$$

従って、

$$a_{j,j-i+1}=-\frac{\hat{b}_{j+1,j-i}(\lambda_k)}{\phi_{k-1}(\lambda_k)}$$

$$\begin{aligned}b_{j,j-i-1}(t)=f_k{}^i[&(t-\lambda_k)^{-1}(\phi_{k-1}{}^i a_{j,j-i+1}+\hat{b}_{j+1,j-i}(t))\\&+\sum_{m=0}^{i-2}a_{j,j-m}f_{k-1}{}^i\phi_{k-1}{}^{m+1}\hat{b}_{j-m,j-i}(t)\\&-\{g_{k-1}{}^{i-1}(t-\lambda_k)+\phi_{k-1}(n_k-i+1)\}\hat{b}_{j,j-i}(t)\\&+(t-\lambda_k)\phi_{k-1}\hat{b}_{j,j-i}'(t)]\end{aligned}$$

〔3－2〕$3\leq i\leq n_k$かつ$N_{k-1}+i\leq j\leq N_k-1$の場合

定数$\{a_{j,j-i+1}\}$と多項式$\{b_{j,j-i-1}(t)\}$は以下の通り：

$a_{j,j-i+1}=0,$

$$b_{j,j-i-1}(t) = f_k^{\,i}(t-\lambda_k)^{j-N_k}[-(t-\lambda_k)\phi_{k-1}\hat{b}_{j,j-i}'(t) - \{g_{k-1}^{\,i-1}(t-\lambda_k)+\phi_{k-1}(j-i+1-N_{k-1})\}\hat{b}_{j,j-i}(t)$$
$$\hat{b}_{j+1,j-i}(t)+\sum_{m=0}^{i-2} a_{j,j-m}\phi_{k-1}^{\,m+1}\hat{b}_{j-m,j-i}(t)]$$

〔３－３〕 $i > n_k$または$N_{k-1} < j \leqq N_{k-1}+i-1$の場合

(1.2.20)は次のように書き替えられる：

$$b_{j,j-i-1}(t) = f_{k-1}^{\,i}[(\phi_{k-1}^{\,i}a_{j,j-i+1}+\hat{b}_{j+1,j-i}(t)) + \sum_{m=0}^{i-2} a_{j,j-m}f_{k-1}^{\,i}\phi_{k-1}^{\,m+1}\hat{b}_{j-m,j-i}(t)]/(t-\lambda_k)$$
$$- f_{k-1}^{\,i}[\{g_{k-1}^{\,i-1}+\phi_{k-1}(n_k-i+1)\}\hat{b}_{j,j-i}(t) + \phi_{k-1}\hat{b}_{j,j-i}'(t)]$$

上式に$t = \lambda_k$を代入することで定数$\{a_{j,j-i+1}\}$が確定できる。そして、その情報を用いて上式より多項式$\{b_{j,j-i-1}(t)\}$を決定する。

以上のように、今度も$\{P_{i-1}(t)\}(i = 3,\cdots,j-1)$から一意的に定数$\{a_{j,j-i+1}\}$及び多項式$\{b_{j,j-i-1}(t)\}$が決定できた。ただし、第３番目で行った理論説明は、第$(i-2)$副対角成分定数$\{a_{j,j-i+2}\}$及び多項式$\{b_{j,j-i}(t)\}$までが全て確定されいることを仮定している。

第１番目、第２番目そして第３番目の変換理論を使えば行列Ａの要素は、全て微係数$\{P_{n-j}(t)\}$から決定できる、そしてその形は以下となる：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ a_{j,k} & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

ここで各行列$A_k(1 \leqq k \leqq r)$は、companion行列と呼ばれるn_k次の定数行列である：

$$A_k = \{a_{i,j} : i,j = N_{k-1}+1,\cdots,N_k\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 \; \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ a_{N_{k-1},N_{k-1}+1} & a_{N_{k-1},N_k+2} & \cdots & n_k-1+a_{N_k,N_k} \end{bmatrix}$$

第２章　２変数の偏微分方程式系からFuchs型常微分方程式への変換理論

§２－１　はじめに

本章では２変数の偏微分方程式系から完全積分可能な全微分方程式系を導く．さらに，この全微分方程式系を一変数yを定数とした断面（y-section）におけるFuchs型常微分方程式に変換する．すなわち，２変数の偏微分方程式系：

$$\begin{cases} \phi r = A_1 s + B_1 p + C_1 q + D_1 z \\ \psi t = A_2 s + B_2 p + C_2 q + D_2 z \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ただし，A_iとB_i(i=1,••,4)はxとyの有理式であり，

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$\phi \neq 0$，$\psi \neq 0$とする．

を完全積分可能条件：

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial y} + \sum_{h=1}^{n} g_{hk} f_{ih} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x} + \sum_{h=1}^{n} f_{hk} g_{ih} \tag{2.1.2}$$

$$(i, \ k = 1, \cdots, n)$$

を満たす全微分方程式系：

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} z_k \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

ただし，$\omega_{ik} = f_{ik}(x, y)\, dx + g_{ik}(x, y)\, dy$　　(2.1.3)

に変換し，さらに，３階もしくは４階のy-sectionにおけるFuchs型常微分方程式を導く．まず，(2.1.1)の第一式をyで偏微分して，第二式をxで偏微分すると

$$\begin{cases} \phi \dfrac{\partial r}{\partial y} - A_1 \dfrac{\partial s}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial y} + B_1\right) s + C_1 t - \dfrac{\partial \phi}{\partial y} r + \dfrac{\partial B_1}{\partial y} p + \left(\dfrac{\partial C_1}{\partial y} + D_1\right) q + \dfrac{\partial D_1}{\partial y} z & \cdots(1) \\ \psi \dfrac{\partial t}{\partial x} - A_2 \dfrac{\partial s}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x} + C_2\right) s - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} t + B_2 r + \left(\dfrac{\partial B_2}{\partial x} + D_2\right) p + \dfrac{\partial C_2}{\partial x} q + \dfrac{\partial D_2}{\partial x} z & \cdots(2) \end{cases} \tag{2.1.4}$$

これら二式の左辺は $\dfrac{\partial s}{\partial x}$ と$\dfrac{\partial s}{\partial y}$の線形形式である。

これらの線形形式の係数の行列式は

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi & -A_1 \\ -A_2 & \psi \end{vmatrix} = \phi\psi - A_1 A_2$$

である。

以下の二つの場合に場合わけして考える。

①：$\phi\psi - A_1 A_2 = 0$

②：$\phi\psi - A_1 A_2 \neq 0$

ただし，②の場合では次の四つの場合に分けて考える。

$②_1$：$A_1 \neq 0$，$A_2 \neq 0$

$②_2$：$A_1 = 0$，$A_2 \neq 0$

$②_3$：$A_1 \neq 0$，$A_2 = 0$

$②_4$：$A_1 = 0$，$A_2 = 0$

①の場合については，T.Kimura [11] が，$②_1$の場合については，M.Kohno and T.Suzuki [13] がすでに研究しているので，本章では$②_3$の場合について考える．

§2−2　$\Delta \neq 0$，$A_1 \neq 0$，$A_2 = 0$の場合の変換

(2.1.4)において$\psi\times(1)+A_1\times(2)$と$A_2\times(1)+\phi\times(2)$を計算すると

$$\Delta\frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z \tag{2.2.1}$$

$$\Delta\frac{\partial s}{\partial x} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z \tag{2.2.2}$$

次にz_j($j=1,\cdots,4$)を

$$\begin{cases} z_1 = z \\ z_2 = \phi p + \phi_1 z \\ z_3 = \psi q + \psi_1 z + \psi_2 p \\ z_4 = \Delta s + \xi p + \zeta q + \eta z \end{cases} \tag{2.2.3}$$

とおくと，dz_2は次のようになる．

$$\begin{aligned} dz_2 &= p\,d\phi + \phi\,dp + z\,d\phi_1 + \phi_1\,dz \\ &= p\,d\phi + z\,d\phi_1 + \frac{1}{\Delta}(A_1\,dx + \phi\,dy)\,z_4 \\ &\quad + \Big\{ \underline{\Big(C_1 - \frac{A_1}{\Delta}\zeta\Big)}\,q + \Big(\Big(D_1 - \frac{A_1}{\Delta}\eta\Big) - \frac{\phi_1}{\phi}\Big(B_1 - \frac{A_1}{\Delta}\xi + \phi_1\Big)\Big)\,z_1 \\ &\qquad + \frac{1}{\phi}\Big(B_1 - \frac{A_1}{\Delta}\xi + \phi_1\Big)\Big)\,z_2 \Big\}\,dx \\ &\quad + \Big\{ \underline{\Big(\phi_1 - \frac{\phi}{\Delta}\zeta\Big)}\,q + \underline{\Big(\frac{\xi}{\Delta}\phi_1 - \frac{\phi}{\Delta}\eta\Big)}\,z_1 - \frac{\xi}{\Delta}z_2 \Big\}\,dy \end{aligned}$$

dz_2の式からqの項と$z_1\,dy$の項が消えるように未定係数を決める．
すなわち，下線部分が零になるようにϕ_1，ζ，ηを決める．

$$\zeta = X\Delta \quad , \phi_1 = X\phi \quad , \eta = X\xi \qquad \text{ただし } X = \frac{C_1}{A_1}$$

同様に，dz_3は次のようになる．

$$dz_3 = q\,d\psi + \psi\,dq + z\,d\psi_1 + \psi_1\,dz + p\,d\psi_2 + \psi_2\,dp$$
$$= \{\psi s + \psi_1 p + \psi_2 r\}\,dx + \{\psi t + \psi_1 q + \psi_2 s\}\,dy$$
$$+ q\,d\psi + z\,d\psi_1 + p\,d\psi_2$$

ここで，

$$\{\psi s + \psi_1 p + \psi_2 r\}\,dx$$
$$= [\,(\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{1}{\Delta}z_4$$
$$+ \{-(\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{\zeta}{\Delta} + \frac{\psi_2}{\phi}C_1\}\frac{1}{\psi}z_3$$
$$+ \{\frac{\psi_2}{\phi}D_1 - (\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{\eta}{\Delta} + \frac{\psi_1}{\psi}((\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{\zeta}{\Delta} - \frac{\psi_2}{\phi}C_1)\}\ z_1$$
$$+ \{-(\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{\xi}{\Delta} + (\frac{\psi_2}{\phi}B_1 + \psi_1)$$
$$+ \frac{\psi_2}{\psi}((\frac{\psi_2}{\phi}A_1 + \psi)\frac{\zeta}{\Delta} - \frac{\psi_2}{\phi}C_1)\}\ p\,]\,dx$$

$$\{\psi t + \psi_1 q + \psi_2 s\}\,dy$$
$$= [\,\frac{\psi_2}{\Delta}z_4$$
$$+ \frac{1}{\psi}(C_2 + \psi_1 - \frac{\psi_2}{\Delta}\zeta)\ z_3$$
$$+ \{D_2 - \frac{\psi_2}{\Delta}\eta - \frac{\psi_1}{\psi}(C_2 + \psi_1 - \frac{\psi_2}{\Delta}\zeta)\}\ z_1$$
$$+ \{B_2 - \frac{\psi_2}{\Delta}\xi - \frac{\psi_2}{\psi}(C_2 + \psi_1 - \frac{\psi_2}{\Delta}\zeta)\}\ p\,]\,dy$$

dz_3においてpdxの係数とpdyの係数が零になるようにψ_1, ψ_2, ξを決める．
すなわち，

$$\psi_2 = -\frac{\phi\psi}{A_1} \qquad , \psi_1 = \frac{\psi}{A_1}(X\phi + B_1)$$
$$\xi = -A_1\{B_2 + \frac{\phi}{A_1}(\frac{1}{A_1}\zeta + C_2 + \frac{\psi}{A_1}(X\phi + B_1))\}$$

このように未定係数を決めてやると，全微分方程式系dz_i（i=1,…,4）は次のように表せる．

$$d\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & 0 & \omega_{24} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \omega_{34} \\ \omega_{41} & \omega_{42} & \omega_{43} & \omega_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

(2.2.4)が条件(2.1.2)を満足するとき，その解空間の次元は4であり，直ちに次の形のy-sectionにおける連立微分方程式を得る．

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{11} & \hat{\omega}_{12} & 0 & 0 \\ \hat{\omega}_{21} & \hat{\omega}_{22} & 0 & \hat{\omega}_{24} \\ \hat{\omega}_{31} & \hat{\omega}_{32} & \hat{\omega}_{33} & \hat{\omega}_{34} \\ \hat{\omega}_{41} & \hat{\omega}_{42} & \hat{\omega}_{43} & \hat{\omega}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

よって$\hat{\omega}_{12}$，$\hat{\omega}_{24}$，$\hat{\omega}_{43}$が零でないならば，
(2.2.5)において，第1行目をz_2について解くと

$$z_2 = \left(\frac{dz_1}{dx} - \hat{\omega}_{11} z_1\right) / \hat{\omega}_{12}$$

第2行目をz_4について解くと

$$z_4 = \left(\frac{dz_2}{dx} - \hat{\omega}_{21} z_1 - \hat{\omega}_{22} z_2\right) / \hat{\omega}_{24}$$

第4行目をz_3について解くと

$$z_3 = \left(\frac{dz_4}{dx} - \hat{\omega}_{41} z_1 - \hat{\omega}_{42} z_2 - \hat{\omega}_{44} z_4\right) / \hat{\omega}_{43}$$

これら3式を，第3行目の式：

$$\frac{dz_3}{dx} = \hat{\omega}_{31} z_1 + \hat{\omega}_{32} z_2 + \hat{\omega}_{33} z_3 + \hat{\omega}_{34} z_4 \tag{2.2.6}$$

に代入する．

(2.2.6)式において$z_1 = z$とした式がy-sectionにおける4階のFuchs型微分方程式になる．

§2－3　数式処理例

§2－2の場合の例として，Horn's list ([2]を参照)に載っている2変数関数Ψ_1が満たす偏微分方程式系：

$$\Psi_1 \begin{cases} x(1-x)r - xys + (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)p - \beta yq - \alpha\beta z = 0 \\ yt + (\gamma' - y)q - xp - \alpha z = 0 \end{cases}$$

をREDUCEを用いて数式処理した結果を与える．

これを変換して得られる完全積分可能な全微分方程式系：

$$dz_k = \omega_{k1} z_1 + \omega_{k2} z_2 + \omega_{k3} z_3 + \omega_{k4} z_4 \qquad (k=1,\cdots,4)$$

の係数ωと，この全微分方程式系の一変数yを定数とした断面（y-section）における超幾何常微分方程式：

$$H_4 z^{(4)} + H_3 z^{(3)} + H_2 z'' + H_1 z' + H_0 z = 0$$

の係数Hを出力とする．REDUCEの処理結果のTEXによる出力は次の通り：

Coeff of PSI1

$$\omega(1,1) := (-(\alpha x dy - \beta x dy + \beta y dx + 2\beta dy - \gamma dy + x dy))/(xy)$$

$$\omega(1,2) := ((x-1)dy - y dx)/((x-1)xy)$$

$$\omega(1,3) := dy/y$$

$$\omega(1,4) := 0$$

$$\omega(2,1) := (-(\beta - \gamma + 1)\beta dx)/x$$

$$\begin{aligned}\omega(2,2) := &((((\alpha x + \beta x - \gamma + x)dy + 3\beta y dx) + (y - \gamma')x dy)(x-1)^2 \\ &- (((y-\gamma')dx + x dy)x + 2(\alpha x + \beta x - \gamma + x)dx)(x \\ &- 1)y + (2x-1)(x-1)y dx - 2(x-1)^3 \beta dy + x^2 y^2 dx) \\ &/((x-1)^2 xy)\end{aligned}$$

$$\omega(2,3) := 0$$

$$\omega(2,4) := ((x-1)dy - y dx)/((x-1)y)$$

$$\begin{aligned}\omega(3,1) := &(-(\alpha^2 x^2 dy - 2\alpha\beta x^2 dy + 4\alpha\beta x dy - 2\alpha\gamma x dy \\ &- \alpha x^2 \gamma' dy + 3\alpha x^2 dy + \beta^2 x^2 dy - 4\beta^2 x dy \\ &- \beta^2 y dx + 4\beta^2 dy + 2\beta\gamma x dy + \beta\gamma y dx - 4\beta\gamma dy \\ &+ \beta x^2 \gamma' dy - 3\beta x^2 dy + 2\beta x y dy - 2\beta x \gamma' dy \\ &+ 6\beta x dy + \beta y dx + \gamma^2 dy - \gamma x y dy + \gamma x \gamma' dy \\ &- 3\gamma x dy - \gamma y dx + x^2 y dy - x^2 \gamma' dy + 2x^2 dy))/(x^2 y)\end{aligned}$$

$$\omega(3,2) := ((x dy - y dx - dy)x)/((x-1)x^2 y)$$

$$\begin{aligned}\omega(3,3) := &(\alpha x dy - \beta x dy - \beta y dx + 2\beta dy - \gamma dy + x y dy - x\gamma' dy \\ &+ 2x dy)/(xy)\end{aligned}$$

$$\omega(3,4) := (-dy)/(xy)$$

$$\begin{aligned}\omega(4,1) := &((2\alpha x dx - 2\beta x dx + 4\beta dx - 2\gamma dx - x^2 dy + x y dx \\ &- x\gamma' dx + 2x dx)(\beta - \gamma + 1)\beta)/x^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega(4,2) :=(&-(\alpha^2x^3dy - \alpha^2x^2ydx - \alpha^2x^2dy - 2\alpha\beta x^3dy \\
&+ 2\alpha\beta x^2ydx + 6\alpha\beta x^2dy - 4\alpha\beta xydx \\
&- 4\alpha\beta xdy - 2\alpha\gamma x^2dy + 2\alpha\gamma xydx + 2\alpha\gamma xdy \\
&- \alpha x^3\gamma' dy + \alpha x^3dy + \alpha x^2y\gamma' dx - \alpha x^2ydx \\
&+ \alpha x^2\gamma' dy - \alpha x^2dy + \beta^2x^3dy - \beta^2x^2ydx \\
&- 5\beta^2x^2dy + 5\beta^2xydx + 8\beta^2xdy \\
&- 5\beta^2ydx - 4\beta^2dy + 2\beta\gamma x^2dy - 3\beta\gamma xydx \\
&- 6\beta\gamma xdy + 5\beta\gamma ydx + 4\beta\gamma dy + \beta x^3\gamma' dy - \beta x^3dy \\
&- \beta x^2y\gamma' dx + \beta x^2ydx + 2\beta x^2ydy - 3\beta x^2\gamma' dy \\
&+ 3\beta x^2dy - 2\beta xy^2dx + 2\beta xy\gamma' dx - 3\beta xydx \\
&- 2\beta xydy + 2\beta x\gamma' dy - 2\beta xdy + \beta ydx \\
&+ \gamma^2xdy - \gamma^2ydx - \gamma^2dy - \gamma x^2ydy + \gamma x^2\gamma' dy \\
&- \gamma x^2dy + \gamma xy^2dx - \gamma xy\gamma' dx + 2\gamma xydx \\
&+ \gamma xydy - \gamma x\gamma' dy + \gamma xdy - \gamma ydx))/((x-1)x^2y)
\end{aligned}
$$

$$\omega(4,3) :=(-(\beta - \gamma + 1)\beta dx)/x$$

$$\omega(4,4) :=(-(\alpha xdy - \beta xdy + \beta ydx + 2\beta dy - \gamma dy - ydx))/(xy)$$

Coeff of Y-Section

$$H(4) := -(x-1)^2x^2$$

$$
\begin{aligned}
H(3) := &-(2(\alpha x + \beta x - \gamma)(x-1) - (y - \gamma' + 10)x \\
&- (\gamma' - 8)x^2 + 2)x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(2) :=(&(y - \gamma' + 6)x - 1)\gamma + ((y - \gamma' + 4) + (2\gamma' - 9)x + 2\gamma)\beta x \\
&- (4\beta x - 2\beta - 2\gamma - x\gamma' + 9x - 4)\alpha x + 2(y - \gamma' + 4)x \\
&+ 2(2\gamma' - 7)x^2 - \alpha^2x^2 - \beta^2x^2 - \gamma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(1) := &-(2\alpha^2x + 2\alpha\beta x - 2\alpha\gamma - 2\alpha x\gamma' + 6\alpha x - \beta x\gamma' \\
&+ 2\beta x - \gamma y + \gamma\gamma' - 2\gamma - 2x\gamma' + 4x)(\beta + 1)
\end{aligned}
$$

$$H(0) :=((\gamma' - 1) - \alpha)(\beta + 1)\alpha\beta$$

$time : 101847ms$

〈 参考文献 〉

[1] G.E.Andrews, The theory of partitions, Addison-Wesley,1976.

[2] A.Erdélyi,W.Magnus,F.Oberhettinger and F.G.Tricomi, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS, Vol.1, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

[3] 後藤英一・一松信・広田良吾, 計算機による数式処理のすすめ, 共立出版, 1986.

[4] A.C.Hearn, REDUCE user's manual,version 3.2, The Rand corporation, Santa Monica, CA 90406,U.S.A, 1985.

[5] P.Henrici, APPLIED AND COMPUTATIONAL COMPLEX ANALYSIS vol.2, John wiley & Sons, 1977.

[6] E.Hille, ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX DOMAIN, John wiley & Sons, 1976, pp.258~265.

[7] 福原満洲雄, 常微分方程式 第2版, 岩波全書, 1980.

[8] 福原満洲雄, 常微分方程式ノ解法 II(線型ノ部), 岩波書店, 1941.

[9] 福原満洲雄, 常微分方程式論, 岩波講座「数学」, 1933, pp.244~282.

[10] M.Hukuhara, Kansu-hoteishiki kokyu, Tsuda-juku Daigaku Seminar Note in Mathematics, No.3, 1977.(in Jananese)

[11] T.Kimura, Hypergeometric functions of two variables, Lecture notes of University of Minnesota, 1973.

[12] T.Kimura, On Fuchsian Differential Equations Reducible to Hypergeometric Equations by Linear Transformations, Funkcialaj Ekvacioj, 13(1970),pp.213~232.

[13] M.Kohno & T.Suzuki, Reduction of single Fuchsian differential equations to hypergeometric systems, Kumamoto J. Sci.(Math) Vol.17,27~74 March(1987)

[14] 大久保謙二郎・河野實彦, 漸近展開, 教育出版, 1976.

[15] 大久保謙二郎, モノドロミ群, 月刊マセマテックス No.7, 1980.

[16] K.Okubo, CONNECTION PROBLEMS FOR SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS, Proc. of Japan-U.S. seminar on ordinary differential and functional equations, Lecture Notes in Mathematics, 243, Springer, 1977, pp.238~248.

[17] K.Okubo, On an algebra of monic polynomials, unpublished paper,1986.

[18] K.Okubo, On The Group Of Fuchsian Equations, Progress Report For Grant-in-Aid For Scientific Research, 1981.

[19] K.Okubo, REDUCIBILITY OF FUCHSIAN SYSTEMS, kokyuroku, RIMS.Kyoto Univ., 267(1976), pp.102~108.